2024年度（令和6年度）大学院工学研究科（博士前期課程）

私費外国人留学生

専門試験問題

（情報工学系プログラム）

注 意 事 項

1．試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．問題は，1ページから20ページまであります。解答用紙は，2枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．下記表の問題番号14から19の中から2題を解答してください。1題につき解答用紙1枚を使用して解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
14	計算機ソフトウエア Computer software
15	計算機ハードウエア Computer hardware
16	情報数学 Mathematics for computer science
17	微分積分・線形代数 Calculus and linear algebra
18	数理科学1 Mathematics 1
19	数理科学2 Mathematics 2

4．監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を2枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．コンパス及び定規等は，使用できません。

9．時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 14　**計算機ソフトウェア**　設問についてすべて解答すること。

I　ある組合せ最適化問題に関する（1）～（4）の問いに答えよ。なお，設問中の時間計算量は漸近的評価（タイト）とする。

各辺に非負の実数値の重みが定義された完全無向グラフが与えられたとき，すべての頂点を巡回して出発点に戻る最短の巡回路（単純閉路）を求めたい。なお，最短の巡回路とは，各辺の重みの総和が最小になる巡回路を指す。この問題は，$\boxed{\text{(A)}}$問題として知られている。完全無向グラフの頂点数を n とすると，すべての頂点を巡回する巡回路の組合せ総数は，時計回り・反時計回りを区別する場合，$\boxed{\text{(B)}}$となる。各巡回路の試行において n に比例した時間がかかる場合，すべての巡回路の試行に要する時間計算量は $O(\boxed{\text{(C)}})$ となる。

ここで，$\boxed{\text{(A)}}$問題に対し，「各辺の重みが頂点間のユークリッド距離を表し，なおかつ三角不等式を満たす」という条件を仮定したユークリッド$\boxed{\text{(A)}}$問題（以降，Euc-P と表記）を考える。Euc-P の解法として，近似率保証のある近似アルゴリズムがいくつか知られており，ここでは最小全域木を用いた近似アルゴリズム（以降，Approx-P-Tour と表記）によって近似解を求める。Approx-P-Tour の処理手順を図 1 に示す。STEP 1 の最小全域木 T の構成にあたっては，図 2 に示す Kruskal のアルゴリズムを用いる。完全無向グラフは $G=(V,E,c)$ として与えられ，V は頂点集合 $\{v_1,v_2,...,v_n\}$，E は辺集合 $\{e_1,e_2,...,e_m\}$，c は辺に対する重み関数を表す。なお，n は頂点数，m は辺の総数をそれぞれ表す。

STEP 1: 完全無向グラフの最小全域木 T を構成する。 STEP 2: 任意の頂点を始点として T 上で深さ優先探索を行い，訪問順にすべての頂点を巡回する単純閉路を解とする。

図 1: Approx-P-Tour の処理手順

```
Min-Span-Tree(G=(V,E,c)) {
    T ← φ; // 全域木を構成する辺集合
    for (各頂点v ∈ V) make-set(v);

    // 各辺e ∈ E を c(e)にしたがってソート(昇順)
    // ソート結果をe1,e2,...,em とする
    sort(E,c);

    for (i=1 to m) {
        // 辺ei の端点をそれぞれ x,y とする
        (x,y) ← ei;

        if (find(x) ≠ find(y)) {
            T ← T ∪ {(x,y)};
            union(x,y);
        }
    }
}
```

```
void make-set(v) {
    p ← v の添字番号;
    parent[p] ← p; size[p] ← 1;
}
int find(v) {
    p ← v の添字番号;
    while (parent[p] ≠ p)
        p ← parent[p];
    return p;
}
void union(u,v) {
    p ← find(u); q ← find(v);
    if (size[p] ≧ size[q]) {
        parent[q] ← p; size[p] ← size[p] + size[q];
    } else {
        parent[p] ← q; size[q] ← size[q] + size[p];
    }
}
```

図 2: Kruskal のアルゴリズム（疑似コード）

（1）空欄（A）〜（C）に対して，適切な語句を記述せよ。

（2）図 2 の **sort**(E,c) において，比較に基づくソーティングアルゴリズムを用いる場合，最悪の時間計算量（比較回数）の下界を，Ω 記号と辺の総数である m を用いて示せ。

（3）最小全域木 T に対する辺の重みの総和を W とした場合，`Euc-P` の最適解における辺の重みの総和の下界と，`Approx-P-Tour` の解における辺の重みの総和の上界を，W を用いて具体的に示せ（漸近的評価ではない）。

（4）四つの頂点 v_1,v_2,v_3,v_4 からなる完全無向グラフ G について，各辺の重みが表 1 のように与えられた場合，最小全域木 T に対する辺の重みの総和 W，`Approx-P-Tour` の解における辺の重みの総和，および `Euc-P` の最適解における辺の重みの総和をそれぞれ示せ。なお，解答の際には以下の条件を満足せよ。

- 図 2 の辺 e_i について，二つの端点（隣接頂点）のうち添字番号が小さい方を x とせよ。
- 図 1 の深さ優先探索では，最小全域木 T の構成後において，**find**(v)=v の添字番号 となる頂点 v を探索の始点とせよ。
- 同じく深さ優先探索において，ある訪問中の頂点に対して複数の辺が接続している場合は，最小全域木 T に追加された順にしたがって探索せよ。

表 1: 完全無向グラフ G における各辺の重み

辺の端点	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1		8	5	3
v_2			4	7
v_3				6
v_4				

Ⅱ　アルファベット $\{a,b\}$ 上の言語 L_1 を以下のように定める。

$$L_1 = \{w \mid |w| \geq 3 \text{かつ末尾から数えて3番目と2番目のアルファベットがそれぞれ} b, a\}$$

次の（1）～（3）の問いに答えよ。

（1）言語 L_1 を正規表現で表せ。なお記法は既存の記法のうち何を用いても構わない。

（2）以下の図3は言語 L_1 を受理する非決定性有限オートマトン M_1 である。空欄A～Eを適切に埋めて完成させよ。ただし1つの欄にはアルファベット a, b もしくは ϵ が1つ以上入るものとする。

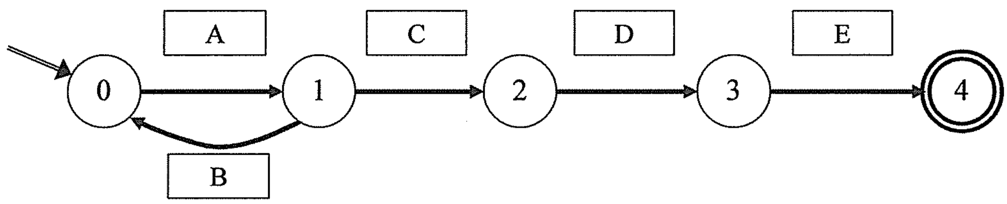


図 3: 非決定性有限オートマトン M_1

（3）M_1 を等価な決定性有限オートマトン M_1' に変換し，M_1' の状態遷移図を示せ。なお解答には変換の過程を示すこと。また，M_1' の状態数は5個以下とする。

Ⅲ　以下の文法 G_2 について，（1）～（4）の問いに答えよ。

$$\begin{aligned} G_2 &= \langle \{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S \rangle \\ P &= \{S \to aSX,\ S \to aYX,\ Y \to bYX,\ Y \to bX,\ X \to a\} \end{aligned}$$

（1）この文法 G_2 が生成する語のうち，長さが8である語をすべて答えよ。

（2）この文法 G_2 が生成する言語 L_2 を示せ。

（3）正規言語に対する繰り返し定理（ポンピング補題あるいは反復補題とも呼ばれる）を用いて，この言語 L_2 が正規言語でないことを証明せよ。

（4）言語 L_2 と等価な言語を受理する非決定性プッシュダウンオートマトン M_2 を構成し，M_2 の状態遷移図を示せ。

このページは空白です。

問題 15　**計算機ハードウエア**　設問について全て解答すること。

I　数値表現に関する以下の問いに答えよ。ただし括弧付きで示した添字の数値は基数を表す。

（1）以下の計算を，n ビットの 2 の補数表現で行う場合，数学的な結果と同じ結果が得られるために必要な最小限の n をそれぞれ答えよ。

(a) $92_{(10)} - 39_{(10)}$

(b) $104_{(10)} + 45_{(10)}$

(c) $63_{(10)} + 1_{(10)}$

（2）2 の冪乗（べきじょう）による乗算・除算結果を得ることを目的として算術シフトが用いられる場合がある。いま，32 ビットの 2 の補数表現で表された $-5_{(10)}$ を，$4_{(10)}$ で除算することを目的として 2 ビット算術右シフトした場合，その結果として得られる値を 10 進数で答えよ。

（3）以下の 4 つが全て正しい式であるとするとき，それぞれの式で用いられている基数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ の値を 10 進数で答えよ。ただし基数は全て正数であるとする。

(a) $21_{(\alpha)} + 17_{(\alpha)} = 40_{(\alpha)}$

(b) $\sqrt{51_{(\beta)}} = 6_{(\beta)}$

(c) $23_{(\gamma)} \div 3_{(\gamma)} = 5_{(\gamma)}$

(d) $234_{(\delta)} - 56_{(\delta)} = 167_{(\delta)}$

（4）客室番号のいずれの桁にも，忌み数（縁起の悪い数）とされる「4」および「9」を使用しないホテルがあり，そのホテルの最小の客室番号は 001，最大の客室番号は 185 であるという。客室番号は忌み数の使用を避けた上で連番で付与されているとするとき，このホテルの総客室数を答えよ。

II　ディジタル回路に関する以下の問いに答えよ。

（1）n 個（$n>1$）の D-FF を，図 1 のように，i 番目（$i=2,3,\cdots,n$）の D-FF である d_i の入力 D_i に対して，d_{i-1} の出力 Q_{i-1} を接続した上で，D_1 には Q_n を接続した。このような回路をリングカウンタと呼ぶ。リングカウンタは一定数の状態を循環して遷移するが，区別可能な状態の数は，$Q_i(i=1,\cdots,n)$ の初期値によって異なる。このリングカウンタが取り得る最大と最小の状態数を，n を用いた式でそれぞれ答えよ。

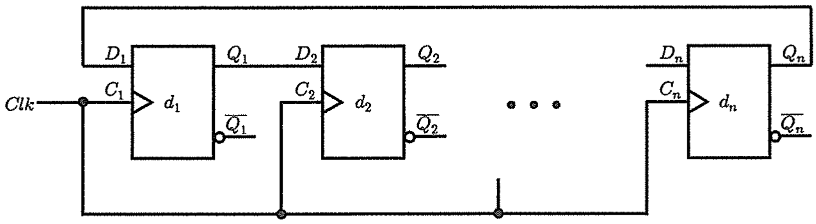


図 1: D-FF によるリングカウンタ

（2）$n=6$ の場合において，図 1 のリングカウンタがとりうる状態数が 3 および 6 となるような，$(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5,Q_6)$ の組み合わせを，$(0,0,0,0,0,1)$ のような形式でそれぞれひとつ答えよ。ただし，$Q_1\sim Q_6$ のうち 2 つを初期値 1 とし，残りの 4 つは初期値 0 とするものとする。

（3）図 1 のリングカウンタの回路において，D_1 と Q_n との接続を断線し，代わりに $\overline{Q_n}$ を D_1 に接続した。このような回路を Johnson カウンタと呼ぶ。Q_i の初期値が全て 0 であるとき，この Johnson カウンタが取り得る状態数を，n を用いた式で答えよ。

（4）n 個の D-FF で表現できる最大 2^n 個の状態を循環遷移する機械の一例に，アップカウンタがある。3 つの D-FF d_1，d_2，d_3 を使用して，$0\rightarrow1\rightarrow2\rightarrow\cdots\rightarrow7\rightarrow0\rightarrow1\rightarrow\cdots$ と記憶値を変化させる，8 進アップカウンタを設計するにあたり，D-FF の入力 D_1，D_2，D_3 に接続すべき回路に対応するカルノー図を，下の書式に従ってそれぞれ記述した上で，導かれる論理式をそれぞれ最も簡単な積和形で示せ。ただし，カウンタ値の 2 進数表現において，最上位桁を Q_3，最下位桁を Q_1 が担うものとする。なお，カルノー図中では don't care 値は ϕ を用いて表すこと。

Q_3 \\ Q_2Q_1	00	01	11	10
0				
1				

（5）ある個数の状態を循環遷移する機械を，D-FF と論理ゲートとの組み合わせによって構築することを考える。この機械を Johnson カウンタ，もしくはアップカウンタとして構築するときに必要となる要素の数をまとめたのが以下の表である。表の空欄 (i)〜(viii) にあてはまる数をそれぞれ答えよ。ただし設計は以下の制約のもと行うものとする。なお設計に際しては，D-FF が 2 つの出力 Q および $\overline{Q}$ を持つことに留意せよ。

- D-FF の初期値は全て 0 とする。
- ある D-FF のための入力の生成に，論理ゲートを用いた回路が必要な場合，その回路はカルノー図から最も簡単な積和形を導出することによって設計する。その上で，その得られた積和形に忠実に回路を実装した場合のゲート数を「必要な論理ゲート数」とみなすこととする。
- 異なる D-FF のための入力生成回路間では，いかなる論理ゲートも共有しないものとする。
- 使用可能な論理ゲートは，NOT, AND, OR の 3 種類とする。
- 3 入力以上の多入力ゲートも，1 つと数えるものとする。

	Johnson カウンタ	アップカウンタ
4 状態を循環遷移する機械	必要な D-FF (i) 個 必要な論理ゲート (ii) 個	必要な D-FF (iii) 個 必要な論理ゲート (iv) 個
6 状態を循環遷移する機械	必要な D-FF (v) 個 必要な論理ゲート (vi) 個	必要な D-FF (vii) 個 必要な論理ゲート (viii) 個

III　以下の問いに答えよ

32bit の整数型の配列をゼロクリアする手続きを C 言語で書くと 2 通りの書き方ができる。1 つは配列を使用したコード（コード 1）であり，もう一方はポインタを使用したコード（コード 2）である。以下の 2 通りのコードを 32 ビット RISC 系 CPU である MIPS（MIPS I アーキテクチャ）のアセンブリ言語で書くと以下の 2 つの通りになる。コード 1 に対応するものがコード 3 であり，コード 2 に対応するものがコード 4 となる。本プログラムで使用される MIPS の命令セットの表現形式を表 1 に示す。ここで，**$s0**〜**$s7**，**$t0**〜**$t7** はレジスタ（初期値は不定値）であり，**$zero** は常に 0 が格納されているレジスタ，`loop1`，`loop2` はラベルである。**$s0** には配列 `AR` の開始アドレスが，**$s1** には，変数 n の値が入っているものとする。

まず，キャッシュが存在しない CPU について考える。これを踏まえて，次の（1）〜（4）について答えよ。

コード 1: 配列版のゼロクリア

```
void clear1(int AR[], int n){
  int i;
  for (i=0; i<n; i+=1){
    AR[i]=0;
  }
}
```

コード 2: ポインタ版のゼロクリア

```
void clear2(int *AR, int n){
  int *p;
  for (p=&AR[0]; p<&AR[n]; p=p+1){
    *p=0;
  }
}
```

コード 3: コード 1 の MIPS アセンブリ言語のコード

```
       move $t0, $zero
loop1: sll $t1, $t0, 2
       (A)
       sw $zero, 0($t2)
       (B)
       slt $t3, $t0, $s1
       bne $t3, $zero, loop1
```

コード 4: コード 2 の MIPS アセンブリ言語のコード

```
1          move $t0, $s0
2          sll $t1, $s1, 2
3          (A)
4 loop2:   sw $zero, 0($t0)
5          (C)
6          slt $t3, $t0, $t2
7          bne $t3, $zero, loop2
```

表 1: 本プログラムで使用される MIPS の命令セットの表現形式

move $t0, $t1	レジスタ$t1 の値をレジスタ$t0 に格納する。
sll $t1, $t0, N	レジスタ$t0 の値を N ビット分だけ左論理シフトした値をレジスタ$t1 に格納する。
add $t2, $t1, $t0	レジスタ$t1 とレジスタ$t0 の値を加算し，その結果をレジスタ$t2 に格納する。
sw $t1, N($t0)	レジスタ$t1 の値をベースレジスタ$t0 の値にオフセット N を加算して得られるアドレスに格納する。
addi $t1, $t0, N	レジスタ$t0 の値と即値 N の値を加算し，その結果をレジスタ$t1 に格納する。
slt $t2, $t0, $t1	レジスタ$t0 の値とレジスタ$t1 の値が$t0 < $t1 ならばレジスタ$t2 へ 1 を格納，そうでなければ 0 を格納する。
bne $t1, $t0, loop1	レジスタ$t1 とレジスタ$t0 が等しくなければラベル loop1 へジャンプする。

(1) コード 3, 4 の空欄 (A) はコード 3 の場合は,「AR[i] のアドレスをレジスタ$t2 に格納する」という操作に対応する命令語，コード 4 の場合は「AR[n] のアドレスをレジスタ$t2 に格納する」という操作に対応する命令語が 1 つ入る。表 1 にある命令を用いてこの空欄に入る命令語を答えよ。ただし，コード 3，コード 4 に入る命令語は同じものになる。

(2) コード 3, 4 の空欄 (B), (C) は共に「次の配列要素を参照するための操作」に対応する命令語が 1 つ入る。表 1 にある命令を用いてこの空欄に入る命令語をそれぞれ答えよ。

(3) このプログラムの意味を変えずに，コード 4 の 1 行目にある「move $t0, $s0」の命令語を表 1 にある move 以外の命令 1 つを使って書き換えよ。

(4) コード 3, 4 の CPI がいくつになるかを n を用いた式で答えよ。ただし，算術・比較，分岐，ストア命令の実行クロック・サイクル数は表 2 の値を用いよ。

表 2: 各命令の実行クロック・サイクル数

算術・比較 (add/addi/sll/slt)	分岐 (bne)	ストア (sw)
3	2	10

つぎに，キャッシュが存在するCPUについて考える。ただし，本キャッシュはデータ領域用のキャッシュである。キャッシュはダイレクトマップ形式のキャッシュで，1ブロックに1ワード（32bit）が割り振られている。また，本キャッシュは10ブロックあり，AR[0]～AR[9]の内容がすでに保持されているものとする。これを踏まえて次の（5）～（6）の問いについて答えよ。

（5）参照の局所性がデータや命令にある時，キャッシュは有効に利用することが出来る。この局所性には時間局所性と空間局所性がある。コード3，4のデータへのメモリアクセスはどちらの局所性を有しているかを述べよ。

（6）次の文章の（ア）～（セ）を埋めよ。ただし,（サ）と（セ）は小数点第2位を四捨五入して，小数点第1位まで示せ。

配列ARが10個のデータを有している場合には，コード3，4はキャッシュ内のデータに対してアクセスすることが可能である。キャッシュ内のデータが書き換わったときにメモリとの一貫性を保つための方法として,（ア）方式と（イ）方式が存在する。（ア）方式では，キャッシュへの書き込みと同時にメモリへの書き込みを行う。つまり，表2の実行クロック・サイクルは（ア）方式のキャッシュへの書き込みと同等であると見なせる。これに対して,（イ）方式はキャッシュの内容が追い出しの対象となった場合にメモリへデータを書き込む。つまり，swの実行クロック・サイクルは表2よりも短くなる。（イ）方式のswの実行クロック・サイクル数を4とすると，ARが10個のデータを持っている際のコード3の総クロック・サイクル数は（ウ），総命令数は（エ）となり，CPIは（オ），コード4の総クロック・サイクル数は（カ），総命令数は（キ）となり，CPIは（ク）となる。また,（イ）方式ではミス・ペナルティとして余分に6クロック・サイクルを必要とすると，配列11個のデータを持っている際のコード3の総クロック・サイクル数は（ケ），総命令数は（コ）となり，CPIは（サ），コード4の総クロック・サイクル数は（シ），総命令数は（ス）となり，CPIは（セ）となる。

問題 16　**情報数学**　設問についてすべて解答すること。

I　次の問題設定をよく読んだのち，(1) ～ (5) の問いについて答えよ。

確率変数 X，Y，Z はそれぞれ

- X: 送信シンボルを表す確率変数
- Y: 受信シンボルを表す確率変数
- Z: 雑音シンボルを表す確率変数

であり，いずれも整数値 0，1，2 のいずれかの値を取る。以下では

$$Y = (X + Z) \bmod 3 \tag{1}$$

で定義される通信路を考える。ここで mod は剰余演算子である。また，確率変数 Z は確率分布

$$P_Z(0) = \frac{2}{3}, \quad P_Z(1) = \frac{1}{6}, \quad P_Z(2) = \frac{1}{6}$$

に従う。解答においては導出過程も示すこと。また簡約化した形で答えを示すこと。ここで簡約化とは，分数に関しては規約形，対数に関しては最も簡単な形 (例:$\log_2 6 \to 1 + \log_2 3$) に変形することを指す。対数の底が 2 の場合には解答内でそれを省略しても良い (例:$\log_2 3 \to \log 3$)。

(1) $X = 1$ とした場合の Y のエントロピー $H(Y|X = 1)$ を求めよ。

(2) 条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を求めよ。

(3) 相互情報量 $I(X;Y)$ の上界値 α(α は正実数)，すなわち，

$$I(X;Y) \le \alpha$$

を満たす数 α を求めよ。ただし，α が相互情報量の上界となる根拠も明確に示すこと。

(4) 式 (1) で定義される通信路の通信路容量 C を求めよ。ただし，導出においては前問で得られた不等式 $I(X;Y) \le \alpha$ を利用し，C が通信路容量となる根拠を明確に示すこと。

(5) 以下では，この通信路を利用した通信を行うため，長さ 3 の繰り返し符号 $\{000, 111, 222\}$ を利用するものと仮定する。一つの符号語を式 (1) で定義される通信路を 3 回利用して送信する (無記憶通信路を仮定)。また，復号法として多数決判定法，すなわち

- 受信語 (3 シンボル) に同一シンボルが 2 個以上含まれている場合に復号結果を SSS とする。ここで，S は 2 個以上含まれている同一シンボルを表す。
- 2 個以上同一シンボルが含まれない場合には,「復号失敗」を宣言する。

を利用するものとする。例えば，受信語が 020 の場合には復号結果は 000 となる。以上の設定において，000 を送信した場合に正しく 000 が復号結果として受信側で得られる確率 P_c を求めよ。

Ⅱ　集合A,B,Cに関する次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　集合$A=\{1,2,3\}, B=\{x|x\in\mathbb{Z}, 1\leq x\leq 4, x \bmod 2=0\}, C=\{4,5\}$ について，以下の集合に関する式を外延的表記（集合の要素を書き下す表記）で書け。ただし，$\mathbb{Z}$は全ての整数の集合，modは剰余演算，$-$は差集合演算，$\emptyset$は空集合，$P(S)$は集合Sのべき集合を表す。

（ア）$A\cup B$　　（イ）$A\cap(B-C)$（ウ）$A\times B$　　（エ）$P\big((A-B)\cap\emptyset\big)$

（２）　D，E，Fをそれぞれ有限集合とする．このとき以下の命題(ア)～(ウ)と等価な論理式をそれぞれ選択肢(a)～(g)から選び記号で答えよ。ただし，$-$は差集合演算を表す.

（ア）$D\subseteq E$　　（イ）$D=E$　　（ウ）$F\subseteq E-D$

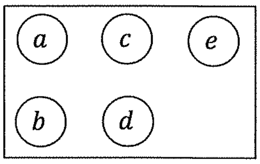
［選択肢］

(a) $\exists x(x\in D\wedge x\in E)$　(b) $\forall x(x\in D\rightarrow x\in E)$　(c) $\exists x(x\in D\rightarrow x\in E)$

(d) $\forall x(x\notin D\rightarrow x\notin E)$　(e) $\forall x(x\in D\rightarrow x\in E)\wedge\forall y(y\in E\rightarrow y\in D)$

(f) $\forall x\big(x\in F\rightarrow(x\notin D\wedge x\in E)\big)$　(g) $\exists x\big(x\in F\wedge(x\notin D\vee x\in E)\big)$

Ⅲ　頂点の集合 $V=\{a,b,c,d,e\}$，有向辺の集合 $E=\{(a,b),(b,c),(c,a),(c,e),(d,e),(e,d)\}$ とする有向グラフ $G=(V,E)$ を考える。グラフGの有向辺の集合Eは，頂点の集合V上の２項関係と考えることができる。次の（１）～（４）の問いに答えよ。



（１）　有向グラフGを図示せよ。ただし，解答の頂点の配置は右図の通りとせよ。

（２）　有向グラフG中で最大の入次数を持つ頂点をすべて列挙し，その入次数を答えよ。

（３）　関係としてのEは反射律を満たさないが，いくつか対（順序対）を追加すると反射律を満たす。反射律を満たすために追加すべき対を列挙せよ。なお，追加する対の数は最小であること。

（４）　関係としてのEは推移律を満たさないが，いくつか対（順序対）を追加すると推移律を満たす。推移律を満たすために追加すべき対を列挙せよ。なお，追加する対の数は最小であること。

Ⅳ　全ての実数の集合を$\mathbb{R}$とする。任意の２つの元$a,b\in\mathbb{R}$に対する２項演算$\circ$を$a\circ b=a+b-2$と定義する。ただし，$+$と$-$は通常の加算と減算であり，$\mathbb{R}$はこれらの演算について閉じている。このとき$\mathbb{R}$と$\circ$で決まる代数$(\mathbb{R},\circ)$について，次の（１）～（４）の問いに答えよ。

（１）　集合$\mathbb{R}$が演算$\circ$について閉じていることを証明せよ。閉じていない場合は反例（閉じていない例）を示せ。

（２）　演算$\circ$について単位元$e\in\mathbb{R}$を答えよ。存在しない場合は「存在しない」と答えよ。

（３）　演算$\circ$についてすべての元$a\in\mathbb{R}$に対する逆元 $i(a)$ を答えよ。存在しない場合はその理由を説明せよ。

（４）　演算$\circ$が結合則を満たすことを証明せよ。満たさない場合は反例（満たさない例）を示せ。

問題 17　**微分積分・線形代数**　設問すべてについて解答すること。

I　2 変数関数

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{2-x^2-y^2}{2+x^2+y^2}}$$

について (1)〜(4) の問いに答えよ。

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ。

(2) グラフ $z = f(x,y)$ の点 $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{2-t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ の値を求めよ。

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\}$ としたとき，

重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を求めよ。

II　実数 a を成分に含む n 次正方行列 A_n $(n \ge 2)$ は

- (i,i) 成分は 1　$(i = 1, 2, \ldots, n)$
- $(j+1,j)$ 成分は 2 であり (j,n) 成分は $(-1)^{n-j}\,a$　$(j = 1, 2, \ldots, n-1)$
- 上記以外の成分はすべて 0

という条件を満たす行列とする。すなわち

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}\,a \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-2}\,a \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-3}\,a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。このとき (1)〜(5) の問いに答えよ.

(1) $n = 3,\ a = 1$ のとき，連立 1 次方程式 $A_3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ。

(2) $n = 4,\ a = 1$ のとき，行列式 $|A_4|$ を求めよ。

(3) $n \ge 3$ のとき，行列式 $|A_n|$ を，$|A_{n-1}|$, n および a を用いて表せ。

(4) 行列式 $|A_n|$ を，n と a とを用いて表せ。

(5) 連立 1 次方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解を持つとき，a を n を用いて表せ。

問題 18　　**数理科学 1**　設問すべてについて解答すること。

I　各整数 n に対して，複素数 a_n と複素関数 f_n とを

$$a_n = (2n-3)^2 e^{n\pi i/4}, \qquad f_n(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z-a_n)}$$

と定める。正の向きを持つ閉曲線 $C : |z| = 4$ を取ったとき，
次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) a_0, a_1, a_2 を $x + iy$ (x, y は実数) の形式で表せ。

(2) $\displaystyle\int_C f_2(z)\,dz$ を求めよ。

(3) $n \neq 1, 2$ の場合に，$z = i$ における $f_n(z)$ の留数を調べて

$\displaystyle\int_C f_n(z)\,dz$ を a_n を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\int_C f_1(z)\,dz$ を求めよ。

II　周期 2π の周期関数 f のフーリエ級数展開は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k \cos kx + b_k \sin kx\},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

として与えられる。関数 $g(x) = x^2$ $(-\pi \leq x < \pi)$ を周期 2π の周期関数に拡張した関数を $\tilde{g}$ と表す。このとき，次の (1) ～ (4) の問いに答えよ。

(1) $\tilde{g}$ のフーリエ係数 a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

(2) $\tilde{g}$ のフーリエ級数展開を表せ。

(3) (2) を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ の値を求めよ。

(4) パーセバルの等式を利用して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ の値を求めよ。

問題 19　　数理科学２　設問すべてについて解答すること。

I 次の (1) ～ (5) の問いに答えよ。

(1) 多項式 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ が

$$p(1) = -3, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 11$$

を満たすように定数 a_0, a_1, a_2 を求めよ。

(2) $n\ (\geq 2)$ 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を使った n 次正方行列

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

を考える。A_3 に以下の操作を行うことにより，２つの行列式 $|A_3|$ と $|A_2|$ との関係式を求めよ。

- 第３列から第２列の x_3 倍を引く
- 第２列から第１列の x_3 倍を引く

(3) $n \geq 3$ のとき，(2) で定めた行列について，２つの行列式 $|A_n|$ と $|A_{n-1}|$ との関係式を求めよ。

(4) (2) で定めた行列について $|A_n| \neq 0$ が成り立つための簡単な必要十分条件を述べよ。

(5) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は互いに異なる実数とする。
任意に実数 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を与えたとき，$(n-1)$ 次以下の多項式 $q(x)$ で

$$q(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たすものがただ１つ存在することを示せ。

Ⅱ 各項 a_n が正である級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を (狭義) 正項級数という。
この正項級数に対して，隣接２項の比の極限 $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が，
正の無限大 ∞ となる場合を含めて存在すると仮定する。このとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は

i) $0 \leq \rho < 1$ であれば収束し　　ii) $1 < \rho \leq \infty$ であれば発散する

というダランベールの商判定法が知られている。
この判定法について，次の (1)〜(4) の問いに答えよ。

(1) 正の定数 b を使った正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{b^n}$ の収束・発散を
ダランベールの商判定法も利用して判定せよ。

(2) ２つの正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ について，$b_n \leq a_n$ $(n \geq 1)$ を満たし
更に $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が発散するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散について述べよ。

(3) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対する $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在し $\rho > 1$ を満たすとき
$1 < r < \rho$ となる定数 r を取る。
十分大きい整数 N を取ると $n \geq N$ であれば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$ が成り立つ。
このことを使って，ダランベールの商判定法の主張 ii) を証明せよ。

(4) ダランベールの商判定法では $\rho = 1$ の場合には判定できない。
このことを，２つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ の収束・発散を
広義積分を利用して判定することで示せ。
ただし，上に有界な単調増加数列は収束する，という事実を利用しても良い。