2023年度（令和5年度）大学院工学研究科（博士前期課程）
専門試験問題
（物理工学系プログラム　材料機能）

注　意　事　項

1．　試験開始の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。

2．　問題は，1ページから9ページまであります。解答用紙は，4枚あります。ページの脱落等に気付いたときは，手をあげて監督者に知らせてください。

3．　下記表の問題を全て解答してください。<u>1題につき解答用紙1枚を使用して</u>解答してください。解答用紙の追加配付はありません。

問題番号	出題科目
11	基礎物理数学
12	固体物理
13	材料物理化学
14	材料科学

4．　監督者の指示に従って，問題番号，志望プログラム及び受験番号を4枚の解答用紙の該当欄に必ず記入してください。

5．　計算用紙は，問題冊子の白紙ページを利用してください。

6．　解答用紙の裏にも解答を記入する場合には，表と上下を逆にして記入してください。

7．　机の上には，受験票，黒の鉛筆・シャープペンシル，消しゴム，鉛筆削り及び時計（計時機能だけのもの）以外の物を置くことはできません。

8．　コンパス及び定規等は，使用できません。

9．　時計のアラーム（計時機能以外の機能を含む。）は，使用しないでください。

10．　スマートフォン，携帯電話，ウェアラブル端末等の音の出る機器を全て机の上に出し，それらの機器のアラームを解除してから，電源を切り，かばん等に入れてください。

11．　試験終了まで退室できません。試験時間中に用がある場合は，手をあげてください。

12．　試験終了後，この問題冊子は持ち帰ってください。

問題 11　基礎物理数学　設問すべてについて解答すること。設問Ⅰと設問Ⅱの解答を解答用紙のおもて面に、設問Ⅲの解答を解答用紙のうら面にそれぞれ記入すること。設問Ⅱ（３）を除き、最終的な解答結果には下線を引くこと。

Ⅰ　次の（１）～（３）の問いについて答えよ。

（１）次の文章の【ア】～【ウ】に入る代数式を記述せよ。

互いに直交する座標軸、x軸、y軸、z軸の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$とすると、式①に示すスカラー場$f(x,y,z)$の勾配は、$\mathrm{grad}\, f(x,y,z) =$ 【ア】$\boldsymbol{i}+$【イ】$\boldsymbol{j}+$【ウ】$\boldsymbol{k}$ と表される。

$$f(x,y,z) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad ①$$

（２）$f(x) = \int_{-a}^{a} \left\{ \exp\left(i\frac{n\pi}{a}x\right) \times \exp\left(-i\frac{m\pi}{a}x\right) \right\} dx$ を計算せよ。ただしn、mはそれぞれ整数であり、$n \neq 0$ および$m \neq 0$ とする。

（３）周期2πのある周期関数が区間$-\pi < x \leqq \pi$において$f(x) = x^2$で表される。この周期関数を式②で示すフーリエ級数に展開する。ただしnは正の整数とする。以下の問い(3a)～(3c)について答えよ。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad ②$$

(3a) a_0を求めよ。

(3b) a_1を求めよ。

(3c) a_nを求めよ。

Ⅱ　$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$について、次の（１）～（３）の問いに答えよ。

（１）Aの行列式を求めよ。

（２）$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$となる$A^{-1}$を求めよ。

（３）A^2、A^3の計算を行うことでA^nを類推せよ。また数学的帰納法を用いて、類推したA^nが正しいことを証明せよ。

Ⅲ　次の（1）、（2）の問いについて答えよ。

（1）図1のようなインダクタンスLのコイルと静電容量Cのコンデンサで構成された直列回路はLC 直列回路と呼ばれる。ある時刻tでコンデンサに蓄えられる電荷量を$Q(t)$とすると、式③の微分方程式が成り立つ。

$$-L\frac{d^2Q(t)}{d^2t}-\frac{1}{C}Q(t)=0 \qquad ③$$

以下の問い(1a)～(1c)について答えよ。ただし積分定数にはA_n $(n=1,2,3\cdots)$を用いて異なる積分定数は区別すること。また、$L>0$、$C>0$とする。

(1a) $Q(t)=e^{\lambda t}$を式③の微分方程式に代入して、λを決める特性方程式を求めよ。またこの特性方程式を解いて、λを求めよ。

(1b) オイラーの公式を用いて、$Q(t)$の一般解を表せ。

(1c) $t=0$ において$Q(0)=Q_0$と与えられたとき、$Q(t)$の特殊解を表せ。ただし$Q(t)$は常に実数である。

（2）図2のような起電力Vの直流電源、抵抗値Rの抵抗と静電容量Cのコンデンサで構成された直列回路は RC 直列回路と呼ばれる。ある時刻tでコンデンサに蓄えられる電荷量を$q(t)$とすると、RC 回路はキルヒホッフの法則から

$$V=R\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{q(t)}{C}$$

で与えられる微分方程式が成り立つ。以下の問い(2a)、(2b)について答えよ。ただし積分定数にはB_n $(n=1,2,3\cdots)$を用いて異なる積分定数は区別すること。また、$V>0$、$R>0$、$C>0$とする。

(2a) $q(t)$の一般解を表せ。

(2b) $t=0$ において$q(0)=0$ と与えられたとき、$q(t)$の特殊解を表せ。

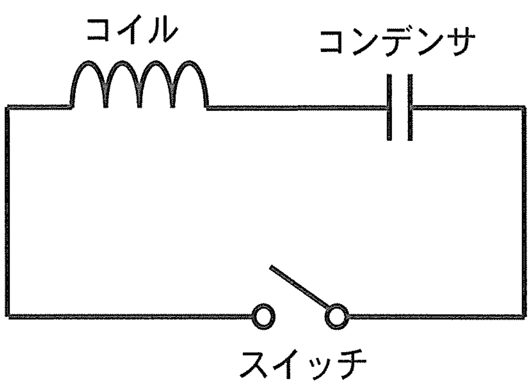

図1

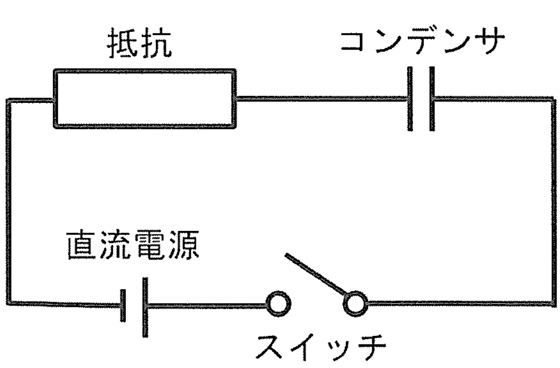

図2

問題 12　固体物理学　設問すべてについて解答すること。

I　次の文章を読んで問いに答えよ。

固体の物理的性質を理解するとき、基本となる情報は原子の配列である。固体の原子数の密度はおよそ（ あ ）cm^{-3}であり、ごく小さな固体であっても、想像もできないほどの原子が集まっている。そのため固体物理は凝縮系物理とも呼ばれる。

同種の単原子が凝集して固体となる場合の結合は（ A ）と（ B ）および分子間力による結合に分類される。異種の原子が凝集すると、結合に寄与する電子の分布がいずれかの原子に偏る。陽イオンと陰イオンが固体を形成する結合は（ C ）と呼ばれる。

（ A ）では、原子と原子の中間に２つの電子の存在確率の高い領域が生じて結合している。このとき２つの電子のスピンは互いに（ ア ）となる。（ A ）により固体となる典型例は（ a ）である。（ B ）では、構成原子の（ イ ）が放出されて自由電子になっている。自由電子は広く動きまわり陽イオンを凝集させる。代表例は１価の陽イオンになりやすい（ b ）である。単原子で分子間力により凝集して常圧下で固体となる典型例は（ c ）である。

凝集して固体となった原子、イオン、分子といった構成要素の配列は（ ウ ）か（ エ ）に大別される。（ ウ ）をＸ線や電子線で観測すると強い回折が得られ、それにより構成要素の配列を決定することができる。（ エ ）の場合は、同様の観測をしてもぼやけた回折しか得られない。

固体の性質を理解するには、非常に多数の粒子を扱うための統計力学が必要になる。粒子の統計分布関数はその粒子の性質によって異なる。量子的な粒子のうち、電子、陽子、中性子はスピンが（ い ）であり、フェルミ粒子と呼ばれる。光子（フォトン）と音子（フォノン）はスピンが（ う ）であり、ボース粒子と呼ばれる。気体分子は、古典的粒子として扱うことができる。この中で電子は次のフェルミ-ディラック分布関数fに従う。

$$f = \frac{1}{\exp(\varepsilon - \mu)/k_{\mathrm{B}}T + 1}$$

ここでεはエネルギー、μは化学ポテンシャル、k_{B}はボルツマン定数、Tは温度である。

光子や音子は巨視的には波動であるが、微視的には粒子性を持つ。逆に、電子は巨視的には粒子であるが、微視的には波動性を持つ。このため、固体の性質を理解するには、波動力学も必要となる。

（１）（ あ ）、（ い ）、（ う ）に当てはまる適切な数値を答えよ。

（２）（ A ）、（ B ）、（ C ）に当てはまる結合名を答えよ。

（３）（ ア ）、（ イ ）、（ ウ ）、（ エ ）に当てはまる適切な語句を答えよ。

（４）（ a ）、（ b ）、（ c ）に当てはまる物質例を３つずつ答えよ。

（５）「一つの状態を占めることができる粒子数」および「粒子を互いに区別できるか」の観点から、フェルミ粒子、ボース粒子、古典的粒子の違いを述べよ。

（６）絶対零度におけるフェルミ-ディラック分布関数 f をエネルギー ε に対して実線で図示せよ。また、有限温度における f を重ねて点線で図示し、絶対零度の場合からどのように変化するかを説明せよ。ただし、化学ポテンシャルμは考える温度と比べて十分に大きなエネルギーとする。

II　図１に示す仮想的な３次元物質を考えてみる。物質は立方体で辺の長さは十分に巨視的でL［m］である。N個の一価の陽イオンが単純立方格子を形成しており、格子定数はa［m］である。電子間の相互作用は無視し、当初は陽イオンによる周期的なクーロンポテンシャルを考慮しない。この物質中を動き回っている自由電子について考える。図２は、k空間（逆空間、波数空間）の$k_x - k_y$平面であり、第一ブリュアン（Brillouin、ブリュアン、ブリルアン）領域が描いてある。以下の問いに答えよ。

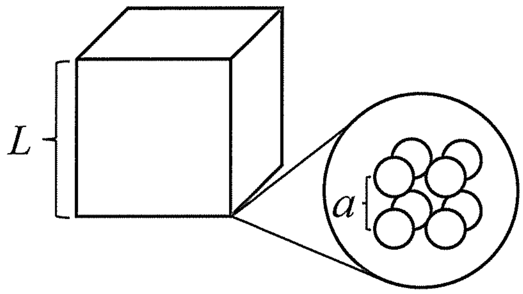

図1

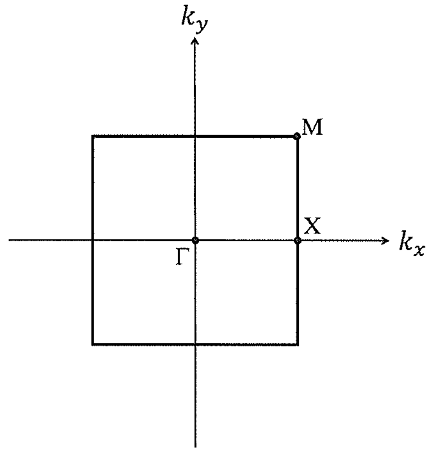

図2

（７）この自由電子のシュレディンガー波動方程式を書け。自由電子は、この物質内部では一定のポテンシャルを受けており、物質の外には出ない。そのポテンシャルはゼロとおいてよい。波動関数にψ、質量にm、エネルギーにε、プランク定数h（あるいは$\hbar = h/2\pi$）を用いよ。必要に応じて、∇やΔ を用いてよい。

（８）表面の影響を排除し、有限の大きさの物質を考えるために、周期的境界条件を用いる。周期的境界条件の元で自由電子のシュレディンガー波動方程式の解を示せ。解は平面波となる。自由電子の波数ベクトルを$\boldsymbol{k} = (k_x、k_y、k_z)$とする。未定係数は規格化条件により定めよ。解を示す際に、周期的境界条件により波数 k_x、k_y、k_zに生じる制約を述べよ。周期的境界条件は次のとおりである。

$$\psi(0、y、z) = \psi(L、y、z)、$$
$$\psi(x、0、z) = \psi(x、L、z)、$$
$$\psi(x、y、0) = \psi(x、y、L).$$

（９）N個の自由電子が存在するとして、フェルミエネルギーε_Fを表わせ。解答には導出過程も示せ。

（10）図２を解答用紙に写して、領域の境界の値を軸に書き加えよ。また、１価の場合の自由電子のフェルミ面と$k_x - k_y$平面の交線をできるだけ正確にていねいに描け。

（11）電場を$+x$向きに加えると、自由電子の波数空間の占有状態はどのように変化するかを解答欄に$k_x - k_y$平面について断面を図示したうえで、そのようになる理由を説明せよ。誇張して描いてよい。

（12）陽イオンによる周期的なポテンシャルの影響が十分にあったとする。$k_x - k_y$平面内における第一エネルギーバンドのようすを図３の枠を解答欄に写して描け。ただし図の縦軸はエネルギー、横軸は$k_x - k_y$平面内での位置であり、Γ、X、Mの位置は図２に示してある。縦軸は任意目盛りであるが、エネルギーの相対的な大きさがだいたい正しくなるように注意して描くこと。

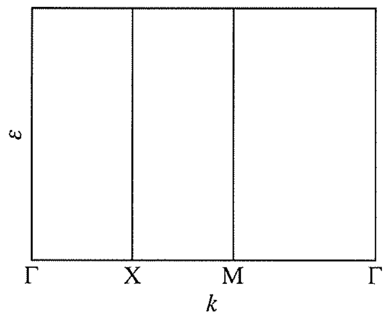

図３

（13）単純な金属の電子比熱が古典論から予想される値より非常に小さくなる理由、および、単純な金属に磁場を加えても、自由電子のスピンのうち反転して磁場の向きになるものはわずかである理由を説明せよ。加えた磁場は１Ｔとする。これによるエネルギー変化は温度に換算して１Ｋ程度である。

問題 13　材料物理化学　設問すべてについて解答すること。

I　次の文章を読み、（1）～（5）の問いについて答えよ。

式①のように、金属 M がそのイオン M^{n+} を含む水溶液に浸漬され平衡状態にある場合を考える。

$$M^{n+} + ne^- \rightleftarrows M \qquad ①$$

式①の反応において、n は反応の電子数である。M および M^{n+} が標準状態（M および M^{n+} の活量が 1）にあるとき、その電極電位 $E^o_{M^{n+}/M}$ は、式①の反応の標準ギブスエネルギー変化 $\Delta G^o_{M^{n+}/M}$、反応の電子数 n、ファラデー定数 F を用いて次式で表される。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　②

水溶液における物質拡散では、電極からある程度以上離れた溶液の沖合では自然対流などの影響によって溶液が撹拌され、濃度がほぼ均一になる。この場合、Nernst の拡散層モデルを用いて物質拡散を考えることができる。

（1）　式②を示せ。

（2）　Cu 電極を Cu^{2+} を含む水溶液中に浸漬させ、Cu 電極と Cu^{2+} が平衡状態にあるとき、Cu 電極の平衡電位 E_{eq} を表す式（Nernst の式）を示せ。このとき、Cu/Cu^{2+} の標準電極電位を $E^o_{Cu^{2+}/Cu}$、Cu^{2+} の濃度を $[Cu^{2+}]$、活量係数を 1 とせよ。

（3）　Cu 電極にカソード（還元）電流 i_c を流したときの Cu 電極で起こる反応式を示せ。

（4）　カソード（還元）反応によって Cu 電極表面近傍の Cu^{2+} の濃度が変化する。電極表面付近において Nernst の拡散層モデルが適用できる場合、Cu 電極表面の Cu^{2+} の濃度を $[Cu^{2+}]^s$、電極から遠く離れた沖合での濃度を $[Cu^{2+}]^b$ としてこれらの濃度で表すカソード電流 i_c の式を導け。また、Cu^{2+} の拡散限界電流密度 i_m を表す式を示せ。このとき、反応の電子数を n、ファラデー定数を F、Cu^{2+} の拡散係数を D、Nernst の拡散層の厚さを δ_N とせよ。

（5）　Cu^{2+} の濃度が 0.1 $kmol/m^3$、Cu^{2+} の拡散係数が $D = 2\times10^{-9}$ m^2/s、$F = 96500$ s·A/mol、Nernst の拡散層厚さが δ_N ＝ 20 μm のとき、Cu^{2+} の拡散限界電流密度を求めよ。

Ⅱ　次の文章を読み、（１）～（４）の問いについて答えよ。

酸性溶液における Fe の腐食では、式①の Fe の溶解のアノード（酸化）反応および式②の H^+のカソード（還元）反応が同時進行する。

$$\underline{\hspace{5cm}} \qquad ①$$

$$2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2 \qquad ②$$

上記の反応において、律速段階は<u>(i)（a: 電荷移動律速、b: 拡散律速）</u>となることから、電流 i と電極電位 E の関係式は式③により表される。

$$i = i_{\mathrm{cor}}\left\{\exp\left(\frac{\alpha_{\mathrm{a}} n_{\mathrm{a}} F(E-E_{\mathrm{cor}})}{RT}\right) - \exp\left(\frac{-(1-\alpha_{\mathrm{c}}) n_{\mathrm{c}} F(E-E_{\mathrm{cor}})}{RT}\right)\right\} \qquad ③$$

ここで、i_{cor}は腐食電流密度、E_{cor}は<u>(ii)（a: 孔食電位、b: 腐食電位）</u>、α_{a}および α_{c}は透過係数、n_{a}および n_{c}は反応に含まれる電子数、R は気体定数、T は絶対温度、F はファラデー定数である。式③において、電極電位 E を正の方向に大きく分極すると、<u>(iii)（a: アノード反応、b: カソード反応）</u>が加速される。このとき、電流 i は次式で表される。

$$\underline{\hspace{5cm}} \qquad ④$$

過電圧 $\eta = E - E_{\mathrm{cor}}$とすると、$\eta$ と i の対数の関係における直線の傾き b_{a}（$\partial\eta / \partial \log i$）を求めることができる。この傾きを<u>(iv)（a: ネルンスト、b: ターフェル）</u>勾配という。

（１）　文章中の (i) ～ (iv) の＿＿＿＿＿の中に入る適切な語句を a および b から選び、アルファベットで答えよ。

（２）　文章中の式①および式④に入る適切な反応式または式を示せ。

（３）　式④から、$\partial\eta/\partial \log i$ を求めよ。ただし、$\ln(x) = 2.3\log(x)$とせよ。

（４）　鉄に微小電圧を印加することにより、電極電位 E を E_{corr} から微小変化させる。このとき、式③から、$\partial\eta/\partial i$を求めよ。ただし、$\exp x \fallingdotseq 1 + x$ とせよ。

問題 14　材料科学　設問すべてについて解答すること。

I　ある面心立方構造を有する純金属 A の単結晶について、室温にて一軸引張試験を行った。試験は平板状の引張試験片（平行部形状：厚さ 2.00 [mm]、幅 3.00 [mm]、ゲージ長さ 7.00 [mm]）を用い、初期ひずみ速度 5.00×10^{-4} [s^{-1}]の条件にて行った。また試験片の荷重軸方位は$[\bar{1}42]$に平行であった。

次の（１）～（７）の問いについて答えよ。ただし、重力加速度 $g = 9.80$ [m/s^2]とする。また問（１）～（７）の解答における有効数字は 2 桁とし、答えの中に$\sqrt{2}$ 、$\sqrt{6}$はそのまま含まれていてもよい。

（１）試料が 0.2%塑性変形を示した時、試験機の荷重は 10.0 [kgf]を示した。この試料の降伏応力（0.2%耐力）σ_yを求めよ。ただし、降伏応力の単位は MPa とする。

（２）面心立方構造を有する金属中で活動し得る{111}面上の<110>すべり系は、幾何学的に 12 種類存在する。それら 12 種のすべり系を具体的にすべて示せ。ただしこの時、各すべり面の法線方向、すべり方向はそれぞれともに$[\bar{1}42]$荷重軸方向と鋭角を成す方向と定義する。

（３）上問（２）で示した 12 種のすべり系のうち、今回の試験条件では$(111)[\bar{1}10]$すべり系が主すべりとして最初に活動した。試験を行った$[\bar{1}42]$荷重軸における$(111)[\bar{1}10]$すべり系のシュミット因子の値（絶対値）を求めよ。

（４）シュミットの法則が成り立つとして、引張変形により活動した$(111)[\bar{1}10]$すべりの臨界分解せん断応力τ_cを求めよ。

（５）すべり面である(111)面上で観察される、バーガースベクトルが$[\bar{1}10]$に平行な転位について、刃状転位およびらせん転位が応力負荷により(111)すべり面上で運動する方向（転位線が移動する方向）をミラー指数にてそれぞれ述べよ。

（６）この純金属を粉末にし、波長 0.154 [nm] の X 線を用いて室温で回折実験を行ったところ、予測されるすべての回折ピークが観測され、具体的に低角度側から、角度 $2\theta = 40.305°$、 46.884°、68.472°の位置に回折ピークが表れた。この結果を基に、この純金属 A の室温での格子定数 a を求めよ。ただし$\sin(20.1525°) = 0.345$、$\sin(23.442°) = 0.398$、$\sin(34.236°) = 0.563$として計算せよ。

（７）この純金属 A にて、すべり面である(111)面上でバーガースベクトルが$[\bar{1}10]$に平行な完全転位が 2 本のショックレーの部分転位に分解した。2 本の部分転位がもつバーガースベクトルの方向をそれぞれ示し、またその大きさを（６）の結果を基に具体的に数値として示せ。

II 次の（1）～（3）の問いについて答えよ。

（1）あるD、Eの二元素からなる大気圧下での仮想的な状態図において、温度 T_1 ではD元素がより多く含まれる固相α相と、E元素がより多く含まれる固相β相の二相のみが平衡状態で存在するとする。この二元系において、Dを70 mass%、Eを30 mass%含む合金Pと、Dを40 mass%、Eを60 mass%含む合金Qを作ってみたところ、完全に平衡状態に達した際、合金P中では温度 T_1 にて存在するα相とβ相の重量比が8 : 2、合金Q中では温度 T_1 にて存在するα相とβ相の重量比が4 : 6であった。この温度 T_1 におけるα相、β相の固溶限、すなわちα相に含まれるE元素の最大量、β相に含まれるD元素の最大量をそれぞれmass%で求めよ。

（2）T_1 より高温の温度 T_2 において、合金Pの組成にて液相と固相β相が反応し固相α相が生成する反応が認められた。この不変系反応の名称を述べよ。

（3）他の温度、合金組成において（2）で示した以外の二元系の不変系反応は認められなかった。予想される元素D、Eの二元系状態図を図示せよ。ただし図中には液相、固相α相、固相β相、それぞれの混合二相領域が図中のどの領域に存在するかを記載すること。